Corentin Bergeron ENS Rennes

Géométrie sur les matrices par les extrema liés

Ce développement propose une des nombreuses applications du théorème des extrema liés à la géométrie de matrices (comme par exemple le développement classique sur la minimisation d'une norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$*). On y montre un lemme algébrique portant sur la compostion d'un projecteur orthogonal et d'un autoadjoint, puis on utilise le théorème des extrema liés pour caractériser la distance à une matrice pour une certaine norme.*

L'avantage de ce développement est qu'il se recase aussi bien dans des leçons d'analyse que d'algèbre. L'utilisation des extrema liés sur des matrices permet le recasage dans les leçons 206, 214, 215 et 219. L'utilisation de matrices et l'apparition de l'importance du rang justifie aussi un bon recasage dans la leçon 148. Un recasage en 161 est aussi intéressant, puisqu'on veut calculer une distance à un certain ensemble. Attention, contrairement aux développements classique sur des minimisations de normes sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *(par exemple), la leçon 149 n'est vraiment pas appropriée (en tout cas, comme je l'ai présenté dans ce document). Un recasage en 151 ou en 158 (pour l'utilisation de projecteurs orthogonaux et du théorème spectral) pourrait à la limite être proposé (mais je ne le conseil vraiment pas, il y a de bien meilleurs développements pour ça, qui se recasent tout aussi bien).*

I - Le développement

Lemme 1

Soit p un projecteur orthogonal de rang 1 et s autoadjoint. Alors $\mathrm{tr}(p \circ s) \geq \lambda_n$, où $\lambda_n = \min_{\sigma}(s)$. De plus, on a égalité si et seulement si p est la projection sur $\mathbb{R}f_n$, $f_n \in \ker(s - \lambda_n \mathrm{id})$.

Preuve :

On remarque que dans toute b.o.n., les coefficients diagonaux de la matrice de p sont positifs. En effet, si $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ est une b.o.n telle que $p(g_i) = \delta_{in} g_n$ (possible par p est un projecteur orthogonal), alors pour toute b.o.nb. $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, il vient :

$$p(e_i) = \langle e_i, g_n\rangle g_n = \langle e_i, g_m\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle g_m, e_j\rangle e_j$$

et donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad [p(e_i)]_i = \langle e_i, g_n\rangle^2.$$

Comme s est autoadjoint, il existe $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une b.o.n. qui diagonalise s. Soit $(d_i)_{1\leq i\leq n}$ les coefficients diagonaux de la matrice de p dans cette base.

$$\mathrm{tr}(p \circ s) = \sum_{i=1}^{m} d_i \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{m} d_i \lambda_n = \mathrm{tr}(p)\, \lambda_n = \lambda_n,$$

avec égalité si et seulement si $d_i = \delta_{in}$ i.e. p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}f_k$, avec k tel que $\lambda_k = \lambda_n$.

Théorème 2

On pose $\mathrm{Sing}_n := \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme :

$$N_2(X) = \left(\sum_{i,j} x_{i,j}^2\right)^{1/2} = \mathrm{tr}(X^t X)^{1/2}.$$

Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité suivante :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N_2(A-X) \geq \sqrt{\lambda_{min}},$$

où λ_{min} est la plus petite valeur propre de AA^T. De plus, on a égalité si et seulement si $X = NA$, où $I - N$ est la projection orthogonale sur un vecteur propre de AA^T associé à λ_{min}

Preuve :

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. N_2 est une norme en dim finie, donc atteint son minimum sur des fermés. En particulier, il existe $M \in \mathrm{Sing}_n$ telle que :

$$N_2(A-M) = \inf X \in \mathrm{Sing}_n N_2(A-X).$$

L'idée est d'alors remarquer que minimiser $N_2(A-X)$ revient à minimiser $N_2(A-X)^2 = \mathrm{tr}\big((A-X)^T(A-X)\big)$. Nous allons ainsi avoir envie d'appliquer le théorème des extrema liés à l'application :

$$L(X) = \mathrm{tr}\big((A-X)^T(A-X)\big) = \mathrm{tr}(A^TA) - 2\,\mathrm{tr}(X^TA) + \mathrm{tr}(X^TX),$$

sous la contrainte :

$$\mathrm{Sing}_n = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(X) = 0\}.$$

On a :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ dL(M)\cdot H = -2\,\mathrm{tr}(A^TH) + 2\,\mathrm{tr}(M^TH)$$

et

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)(M)\cdot H = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Com}(M)^T\cdot H\big).$$

Pour appliquer les extrema liés, on a besoin de montrer que $d(\det)(M)$ n'est pas nulle, i.e. $\mathrm{Com}(M)^T$ n'est pas nulle i.e. M est de rang $n-1$.

Supposons par l'absurde que M soit de rang $\leq n-2$. Alors au moins 2 colonnes de M ne sont pas des combinaisons linéaires des $n-2$ autres (par rang). On peut de plus supposer que ces 2 colonnes de M ne sont pas celles de A (car celles de A sont libres). En modifiant une seule de ces deux colonnes, on obtient une matrice de rang $\leq n-1$, que l'on peut ajuster afin de diminuer $N_2(A-M)$ (car on a un des $(a_{ij}-m_{ij})^2$ sera non nul), ce qui contredit la minimalité de M.

Ainsi, par le théorème des extrema liés :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad -2\,\mathrm{tr}(A^TH) + 2\,\mathrm{tr}(M^TH) = \lambda\,\mathrm{tr}\big(\mathrm{Com}(M)^TH\big)$$

d'où

$$2(M-A)^T = \lambda\,\mathrm{Com}(M)^T$$

i.e.

$$MA^{-1} - I = \frac{\lambda}{2}\mathrm{Com}(M)A^{-1}.$$

Posons $N = MA^{-1}$, de rang $\mathrm{rg}(N) = n-1$. On a $N^TN = N$ car

$$(A^T)^{-1}M^TMA^{-1} = (A^T)^{-1}M^T\left(\frac{\lambda}{2}\mathrm{Com}(M)A^{-1}\right) + (A^T)^{-1}M^T = (A^T)^{-1}M^T = \underbrace{N^T = N}_{\text{car } N^T = N^TN \text{ est symétrique}}.$$

On en déduit que N est une projection orthogonale.

Finalement,

$$N_2(A-M)^2 = \mathrm{tr}\big((A-M)^T(A-M)\big) = \mathrm{tr}\big((A-M)^T(I-N)A\big) = \mathrm{tr}\big(\underbrace{(I-N)^2}_{I-N,\text{ de rang } 1}AA^T\big).$$

On en déduit le théorème en appliquant le lemme à $p = I - N$ et $s = AA^T$.



II - Remarques

1 - Bien que simple, c'est un développement qui est en réalité très long à présenter (même pour les plus rapides d'entre vous). Selon moi, il faut faire des choix de présentation suivant la leçon. Pour ma part, je préfère ne pas démontrer le lemme pour les leçons d'analyses, quitte à en parler un peu s'il reste du temps. De même, la partie pour montrer que M est de rang $n-1$ peut être présentée de manière succinte, SAUF pour la leçon 148.

2 - Faites attention, dans le [Cal-Per], ils ne justifient pas l'utilisation des extrema liés, et pire, l'utilisent pour démontrer que le rang de M est $n-1$. Il faut bel et bien démontrer AVANT que le rang de M est $n-1$: on ne peut pas appliquer le théorème des extrema liés si la contrainte n'est pas libre.

3 - Si vous avez peur pour le recasage dans les leçons de différentiabilité, vous pouvez sauter le lemme et démontrer rapidement la différentiabilité de det (justifierait ainsi un recasage en 149) ou de L.

4 - Je n'ai pas forcément tout détaillé, mais il faut évidemment bien connaître tous les petits arguments comme l'existence du minimum, le lien entre comatrice et déterminant, etc... .

III - Références

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Analystan*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier